$$\beta(t) = \max_{t \leqslant \tau \leqslant p} \int_{\tau}^{p} \Big(b(r) - a(r)\Big)\, dr.$$

Эти формулы были использованы в работе [6] при рассмотрении игры

$$\dot{z} = -a(t)u + b(t)v, \quad \|u\| \leqslant 1, \quad \|v\| \leqslant 1,$$

$$z(p) \in Z$$

с интегральной платой

$$\int_{t_0}^{p} g(r, \|u(r)\|)\, dr \to min,$$

где $g(t, \varphi)$ при каждом $t \leqslant p$ выпукла по $\varphi \in [0, 1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

2. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. Новая серия. 1980. Т. 112. № 3. С. 307-330.

3. *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 195-252.

4. *Ухоботов В.И.* Однотипные дифференциальные игры с выпуклой целью // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 196-204.

5. *Ухоботов В.И.* Однотипные дифференциальные игры // Вестник ТГУ. Серия Естественные и техничекие науки. 2007. Т. 12. Вып. 4. С. 540-541.

6. *Ухоботов В.И., Гущин Д.В.* Однотипная задача управления с выпуклой целью при наличии помехи // Вестник ЮУрГУ. Математика. Механика. Физика. 2012. Вып. 6. № 11 (270). С. 24-28.

Ukhobotov V.I. ALTERNATING INTEGRAL FOR A DIFFERENTIAL GAMES

The differential game with simple movement where each player vektogram determined by homothetic stretching of the image of the given convex-valued functions is considered. The problem of constructing a Pontryagin alternating integral in the case of a convex terminal set is researched.

Key words: differential game; control.

УДК 517.911, 517.968

ПРИНЦИП ПЛОТНОСТИ ДЛЯ ИМПУЛЬСНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И НЕВЫПУКЛОЙ ПО ПЕРЕКЛЮЧЕНИЮ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

© **О.В. Филиппова**

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; обобщенное решение; обобщенное квазирешение; априорная ограниченность.

В работе вводятся понятия обобщенного решения и обобщенного квазирешения задачи Коши для импульсного функционально-дифференциального включения с невыпуклой по переключению правой частью, с импульсными воздействиями и запаздыванием. Сформулировано свойство, когда множество обобщенных решений задачи Коши плотно во множестве решений «овыпукленного» включения, которое называют принципом плотности.

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ n-мерное пространство вектор-столбцов, с евклидовой нормой $|\cdot|$; $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$; $\mathbf{L}^n[a,b]$ — пространство суммируемых по Лебегу функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n[a,b]}=\int\limits_a^t|x(s)|ds$; $\mathbf{L}^n_\infty[a,b]$ — пространство измеримых по Лебегу ограниченных в существенном функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}_\infty[a,b]}=\mathrm{vraisup}\{|x(t)|:t\in[a,b]\}$; $Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ — множество всех непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$; $\mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$ – множество всех непустых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$; $\Omega(\mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b]))$ – множество всех выпуклых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$.

Пусть отображения $F_i:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i=1,2,\ldots,r$, удовлетворяют условиям:
1) при всех $x\in\mathbb{R}^n$ отображения $F_i(\cdot,x)$ измеримы;
2) существуют суммируемые функции $l_i:[a,b]\to[0,\infty)$ такие, что для любых $x,y\in\mathbb{R}^n$ и при почти всех $t\in[a,b]$ выполняются неравенства

$$h[F_i(t,x);F_i(t,y)]\leqslant l_i(t)|x-y|,\quad i=1,2\ldots r; \tag{5}$$

3) функции $\|F_i(t,0)\|:[a,b]\to[0,\infty)$, определеные равенствами

$$\|F_i(t,0)\|=\sup_{y\in F_i(t,0)}|y|,\quad i=1,2,\ldots,r,$$

суммируемы.

И пусть $N_i:\mathbf{L}^n_\infty[a,b]\to\mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$ — многозначные операторы Немыцкого, порожденные отображениями $F_i:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $i=1,2,\ldots,r$, и заданные равенствами

$$N_ix=\{z\in\mathbf{L}^n[a,b]:z(t)\in F_i(t,x(t))\text{ при почти всех }t\in[a,b]\}. \tag{6}$$

Рассмотрим задачу Коши для импульсного функционально-дифференциального включения с запаздыванием и правой частью, не обладающей свойством выпуклости по переключению значений

$$\dot{x}\in N_1(P_1x)\cup N_2(P_2x)\cup\ldots\cup N_r(P_rx), \tag{7}$$

$$\Delta(x(t_k))=I_k(x(t_k)),\quad k=1,2,...,m, \tag{8}$$

$$x(a)=x_0, \tag{9}$$

здесь операторы $P_i:\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]\to\mathbf{L}^n_\infty[a,b]$, $i=1,2,\ldots,r$, имеют вид

$$(P_ix)(t)=\begin{cases}x(\omega_i(t)), & \text{если}\quad \omega_i(t)\in[a,b];\\ \varphi_i(\omega_i(t)), & \text{если}\quad \omega_i(t)<a,\end{cases} \tag{10}$$

где измеримые по Лебегу функции $\omega_i:[a,b]\to\mathbb{R}$, $i=1,2,\ldots,r$, при всех $t\in[a,b]$ удовлетворяют неравенству $\omega_i(t)\leqslant t$, ограниченные функции $\varphi_i:(-\infty,a)\to\mathbb{R}^n$ измеримы по Борелю; для любого $k=1,2,...,m$ импульсные воздействия $I_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, определены равенствами

$$I_kx=A_kx+g_k,$$

здесь $A_k\in M_{n\times n}(\mathbb{R}^n)$, $g_k\in\mathbb{R}^n$.

Определим отображение $\Psi:\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]\to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ равенством

$$\Psi(x)=N_1(P_1x)\cup N_2(P_2x)\cup\ldots\cup N_r(P_rx). \tag{11}$$

Тогда включение (7) можно переписать в эквивалентном виде

$$\dot{x} \in \Psi(x). \tag{12}$$

«Овыпукленное по переключению» отображение $\widetilde{\Psi} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b])$ задано равенством

$$\widetilde{\Psi}(x) = \{z \in \mathbf{L}^n[a,b] : z(t) \in F_1(t,(P_1x)(t)) \cup F_2(t,(P_2x)(t)) \cup \ldots \cup F_r(t,(P_rx)(t)) \text{ при почти всех } t \in [a,b]\}. \tag{13}$$

О п р е д е л е н и е 1. Под *обобщенным решением задачи* (7)–(9) понимается функция $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, для которой существует такая суммируемая $q : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая включению $q \in \widetilde{\Psi}(x)$, что при всех $t \in [a,b]$ имеет место равенство

$$x(t) = x_0 + \int\limits_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^m I_k(x(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t). \tag{14}$$

Применительно к задаче (7)–(9) определение квазирешения можно сформулировать следующим образом.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что функция $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, имеющая представление

$$y(t) = x_0 + \int\limits_a^t \widetilde{q}(s)ds + \sum_{k=1}^m I_k(y(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t), \tag{15}$$

является обобщенным квазирешением задачи (7)–(9), если найдется такая последовательность $x_i \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $i = 1,2,...$, что для каждой функции x_i, $i = 1,2,...$ найдется функция $q_i \in \widetilde{\Psi}(y)$, для которой при любом $t \in [a,b]$ имеет место равенство

$$x_i(t) = x_0 + \int\limits_a^t q_i(s)ds + \sum_{k=1}^m I_k(x_i(t_k))\chi_{(t_k,b]}(t), \tag{16}$$

где $x_i \to y$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$.

Отметим, что понятие квазирешения впервые было введено Важевским (T. Wazewski)(см. [1]) для обыкновенного дифференциального включения и играет фундаментальную роль в изучении свойств решений функционально-дифференциальных включений с невыпуклой правой частью. Отметим также, что если множество $\Psi(x)$ в определении обобщенного квазирешения выпукло по переключению, то обобщенное квазирешение совпадает с квазирешением, введенным в работах [2], [3]. Пусть $\mathcal{H}(x_0)-$ множество всех обобщенных квазирешений задачи (7)–(9).

Определим отображение $\widetilde{\Psi}_{co} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(\mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b]))$ равенством

$$\widetilde{\Psi}_{co}(x) = \overline{co}(\overline{sw}\Psi(x)). \tag{17}$$

Оператор $\widetilde{\Psi}_{co} : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b] \to \Omega(\mathrm{Sw}(\mathbf{L}^n[a,b]))$ будем называть *обобщенно овыпукленным оператором.*

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} \in \widetilde{\Psi}_{co}(x), \quad \Delta(x(t_k)) = I_k(x(t_k)), \quad x(a) = x_0. \tag{18}$$

Пусть $H_{\mathrm{co}}(x_0,b)$ – множество всех решений задачи (18) на отрезке $[a,b]$.

Т е о р е м а 1. Справедливо равенство $\mathcal{H}(x_0) = H_{\text{co}}(x_0, b)$.

Теорема 1 является аналогом теоремы Важевского для обыкновенных дифференциальных включений.

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что множество обобщенных решений задачи (7)–(9) *априорно ограничено на* $[a,b]$, если найдется такое число $r>0$, что не существует обобщенного решения $y\in \widetilde{C}^n[a,b]$, для которого выполняется неравенство $\|y\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}>r$.

Т е о р е м а 2. Пусть множество всех локальных обобщенных решений задачи (18) априорно ограничено. Тогда $H(x_0,b)\neq\varnothing$ и справедливо равенство

$$\overline{H(x_0,b)} = H_{co}(x_0,b), \tag{19}$$

где $\overline{H(x_0,b)}$ — замыкание множества $H(x_0,b)$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}[a,b]$.

Свойство, когда множество обобщенных решений включения с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости значений и импульсными воздействиями, плотно во множестве решений «овыпукленного», включения, назовем, по аналогии с обыкновенными дифференциальными включениями, принципом плотности. Таким образом, теорема 2 дает достаточные условия выполнения принципа плотности (см. [3], [4]) для задачи (7)–(9).

Принцип плотности является фундаментальным свойством в теории включений, так как он широко используется в теории оптимального управления, например, для доказательства существования скользящих режимов (см. [5]). Впервые принцип плотности был установлен А.Ф. Филипповым для обыкновенных дифференциальных включений (см. [2]). Впоследствии, обобщению этого результата были посвящены работы многих авторов (см., например, [4], [6], [7]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wazewski A.* Sur une generalisation de la notion des solutions d'une equation au contingent // Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math., astr., phys., 1962, V. 10, № 1. P. 11-15.

2. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

3. *Булгаков А.И., Беляева О.П., Мачина А.Н.* Функционально-дифференциальные включения с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестнк Удмуртского университета. Математика, механика. 2005. № 1. С. 3-20.

4. *Булгаков А.И., Григоренко А.А., Жуковский Е.С.* Принцип плотности - фундаментальное свойство возмущенных включений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2003. Т. 8. № 3. С. 351-352.

5. *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР, 1985. Т. 169. С. 194-252.

6. *Борисович Б.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Ведение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. КомКнига, 2005. С. 216.

7. *Булгаков А.И., Васильев В.В., Ефремов А.А* О принципе плотности для функционально-дифференциального включения нейтрального типа // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, 2001. Т. 6. Вып. 3. С. 308-315.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11-01-00626).

Filippova O.V. THE PRINCIPLE OF DENSITY FOR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL INCLUSION WITH IMPULSES, WITH DELAY AND WITH THE RIGHT PART NOT NECESSARILY CONVEX-VALUED WITH RESPECT TO SWITCHING

Concepts of a generalized solution and a generalized quasi solution of a Cauchy problem for functional-differential inclusion with impulses, with delay and with the right part not necessarily convex-valued with respect to switching are presented. Property, when a set of the generalized solutions of the Cauchy problem is dense in a set of solutions of the "convex" inclusion which is called "the principle" of density, is formulated.

Key words: functional-differential inclusion; generalized solution; generalized quasi solution; a-priori boundedness.